Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 1

8 de mayo de 2023

Zona A tarde | **Zona B** mañana | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2223 – 7121

15 páginas

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

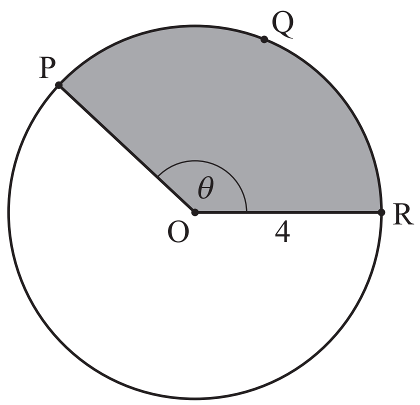
Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra un círculo con centro en O y de $4\,\mathrm{cm}$ de radio.

la figura no está dibujada a escala



Los puntos P, Q y R pertenecen a la circunferencia del círculo y $\mathrm{P\hat{O}R} = \theta$, donde θ se mide en radianes.

La longitud del arco PQR es igual a $10\,\mathrm{cm}$.

(a) Halle el perímetro del sector circular que está sombreado. [2]

(b) Halle θ. [2]

(c) Halle el área de dicho sector circular sombreado. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

2. [Puntuación máxima: 5]

La función f viene dada por $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-2}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$.

(a) El gráfico de $y = f(x)$ tiene una asíntota vertical y una asíntota horizontal.

Escriba la ecuación de:

(i) La asíntota vertical

(ii) La asíntota horizontal [2]

(b) Halle las coordenadas del punto donde el gráfico de $y = f(x)$ corta:

(i) Al eje y

(ii) Al eje x [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

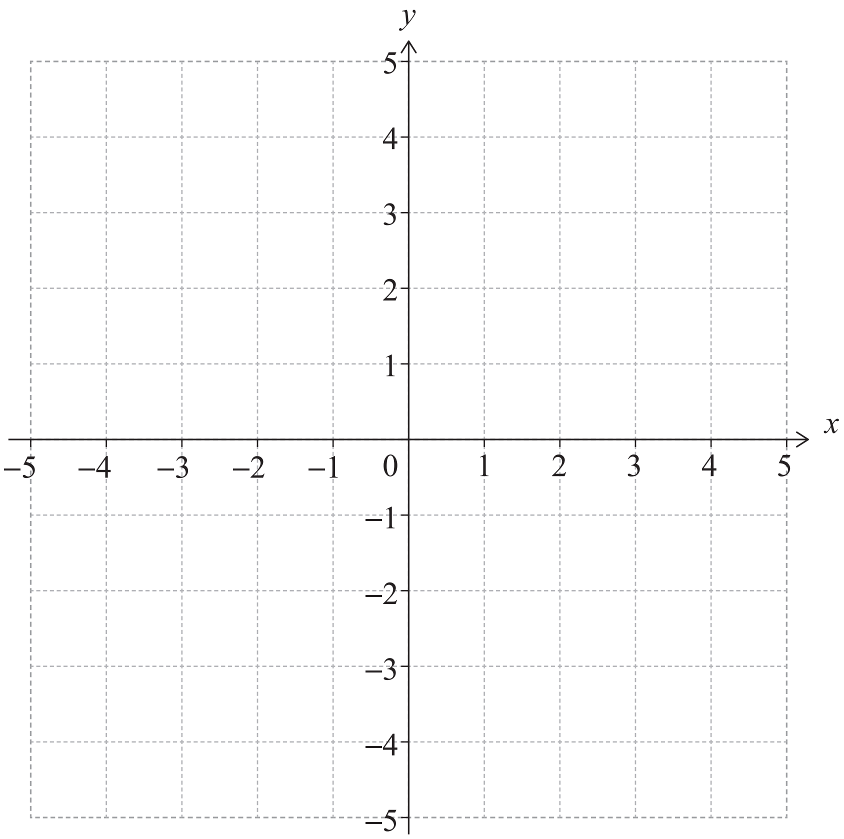
. . . .

. . . .

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

(c) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$ y muestre todas las características que halló en los apartados (a) y (b). [1]



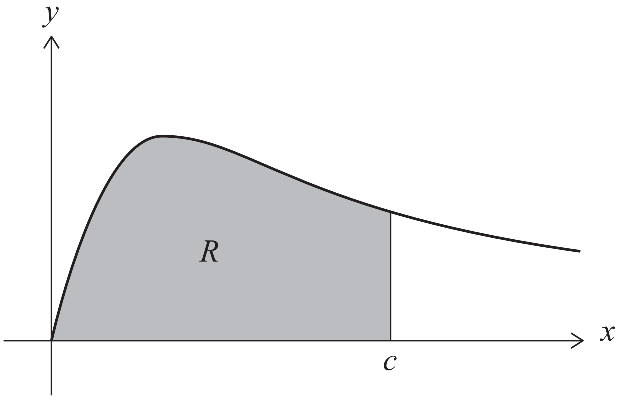
3. [Puntuación máxima: 5]

Los sucesos A y B son tales que $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}25$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}55$.

Halle $\mathrm{P}(B)$.

4. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de $y = \frac{x}{x^2+2}$ para $x \geq 0$.



La región sombreada R está delimitada por la curva, el eje x y la recta $x = c$.

El área de R es igual a $\ln 3$.

Halle el valor de c.

5. [Puntuación máxima: 7]

Las funciones f y g se definen para $x \in \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x) = ax + b\text{, donde } a,\ b \in \mathbb{Z}$$

$$g(x) = x^2 + x + 3\,.$$

Halle las dos posibles funciones f para las que se cumple que $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 14x + 15$.

6. [Puntuación máxima: 5]

La variable aleatoria continua X tiene la siguiente función de densidad de probabilidad f:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & a\leq x\leq 3a\\ 0, & \text{resto de valores}\end{cases}$$

donde a es un número real y positivo.

(a) Indique $\mathrm{E}(X)$ en función de a. [1]

(b) Utilice la integración para hallar $\mathrm{Var}(X)$ en función de a. [4]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. [Puntuación máxima: 7]

Utilice la inducción matemática para probar que $\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ para todo número entero $n \geq 1$.

8. [Puntuación máxima: 7]

Las funciones f y g se definen así:

$$f(x) = \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = \tan x,\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}.$$

Las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en el punto P cuya coordenada x es k, donde $0 < k < \frac{\pi}{2}$.

(a) Muestre que $\cos^2 k = \operatorname{sen} k$. [1]

(b) A partir de lo anterior, muestre que la tangente a la curva $y = f(x)$ en P y la tangente a la curva $y = g(x)$ en P se cortan en ángulo recto. [3]

(c) Halle el valor de $\operatorname{sen} k$. Dé la respuesta en la forma $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, donde a, $c \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}^+$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

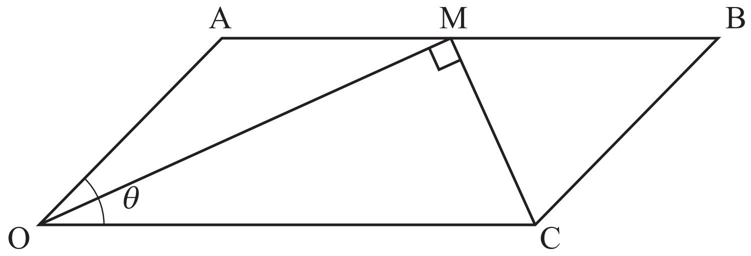
. . . .

. . . .

. . . .

9. [Puntuación máxima: 9]

En la siguiente figura se muestra el paralelogramo OABC, siendo $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c}$ y $|\boldsymbol{c}| = 2|\boldsymbol{a}|$, donde $|\boldsymbol{a}| \neq 0$.



El ángulo que forman $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ es θ, donde $0 < \theta < \pi$.

El punto M pertenece a $[\mathrm{AB}]$ tal que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, donde $0 \leq k \leq 1$ y $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 0$.

(a) Exprese $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ en función de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$. [2]

(b) A partir de lo anterior, utilice un método vectorial para mostrar que $|\boldsymbol{a}|^2\,(1-2k)\big(2\cos\theta - (1-2k)\big) = 0$. [3]

(c) Halle el intervalo de valores de θ para los que existen dos posiciones posibles de M. [4]

No escriba soluciones en esta página.

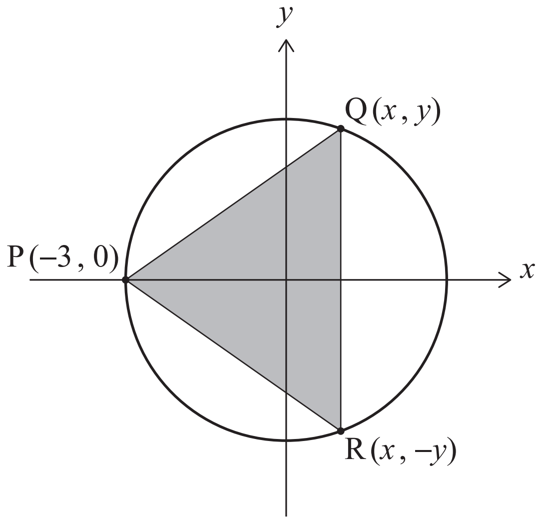
Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 14]

Un círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 9$ tiene el centro en $(0, 0)$ y radio igual a 3.

El triángulo PQR está inscrito en el círculo; sus vértices están en $\mathrm{P}(-3, 0)$, $\mathrm{Q}(x, y)$ y $\mathrm{R}(x, -y)$, donde Q y R son puntos móviles situados en el primer y en el cuarto cuadrante, respectivamente. Toda esta información se representa en la siguiente figura.



(a) Para el punto Q, muestre que $y = \sqrt{9 - x^2}$. [1]

(b) A partir de lo anterior, halle una expresión que dé el área del triángulo $\mathrm{PQR}(A)$ en función de x. [3]

(c) Muestre que $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \dfrac{9 - 3x - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$. [4]

(d) A partir de lo anterior (o de cualquier otro modo alternativo), halle la coordenada y de R tal que A sea máxima. [6]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 22]

Considere el número complejo $u = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

(a) Hallando el módulo y el argumento de u, muestre que $u = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. [3]

(b) (i) Halle el número entero positivo (n) más pequeño posible para el cual u^n es un número real.

(ii) Halle el valor de u^n cuando n tiene el valor que halló en el apartado (b)(i). [5]

(c) Considere la ecuación $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$, donde $z \in \mathbb{C}$.

(i) Sabiendo que u es una raíz de $z^3 + 5z^2 + 10z + 12 = 0$, halle las otras raíces.

(ii) Utilizando una transformación apropiada para pasar de z a w, (o de cualquier otro modo alternativo) halle las raíces de la ecuación $1 + 5w + 10w^2 + 12w^3 = 0$, donde $w \in \mathbb{C}$. [9]

(d) Considere la ecuación $z^2 = 2z^*$, donde $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

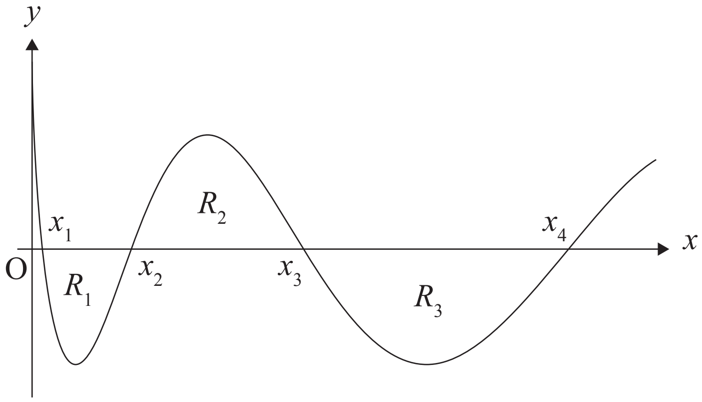
Expresando z en la forma $a + b\mathrm{i}$, halle las raíces de la ecuación. [5]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 17]

(a) Utilizando una sustitución apropiada, muestre que
$\int \cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ \mathrm{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$. [6]

En la siguiente figura se muestra una parte de la curva $y = \cos\sqrt{x}$ para $x \geq 0$.



La curva corta al eje x en $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \dots$.

La n-ésima intersección de la curva con el eje x (x_n), viene dada por $x_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Escriba una expresión similar para x_{n+1}. [1]

Las regiones delimitadas por la curva y por el eje x las denominaremos $R_1,\ R_2,\ R_3,\ \dots$, tal y como se muestra en la figura.

(c) Calcule el área de la región R_n.

Dé la respuesta en la forma $kn\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$. [7]

(d) A partir de lo anterior, muestre que las áreas de las regiones delimitadas por la curva y por el eje x ($R_1,\ R_2,\ R_3,\ \dots$) forman una progresión aritmética. [3]

Fuentes:

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.